Drumuri si curbe parametrizate

Definitie. *Fie un interval compact* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Se numeste drum parametrizat in* $\mathbb{R}^2$ *(resp.* $\mathbb{R}^3$*) orice functie vectoriala* $\overline{r} = (x,y) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *(resp.* $\overline{r} = (x,y,z) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$*). Punctele* $\overline{r}(a) = (x(a), y(a), z(a))$ *si* $\overline{r}(b) = (x(b), y(b), z(b))$ *se numesc extremitatile drumului iar multimea* $\{(x(t), y(t.z(t))) : t \in [a,b]\}$ *se nuemste suportul (traiectoria) drumului. Ecuatiile*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ , \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

se numesc ecuatiile parametrice ale drumului.

Daca $\overline{r}(a) = \overline{r}(b)$, drumul se numeste inchis. Daca functia vectoriala $\overline{r}$ este injectiva, spunem ca drumul este simplu. Un drum inchis se numeste simplu daca $\overline{r}|_{[a,b]}$ este o funcrtie injectiva.

Un drum $\overline{r} = (x,y,z) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se numeste neted daca functiile x, y, z sunt de clasa C^1 (derivabile si cu derivata continua) si $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 > 0$ pentru orice $t \in [a,b]$.

Doua drumuri $\overline{r}_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ si $\overline{r}_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ sunt echivalente daca exista o functie (numita schimbare de parametru) $\varphi\ : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ continua, bijectiva, strict monotona si astfel ncat $\overline{r}_1(t) = \overline{r}_2(\varphi(t))$ pentru orice $t \in [a_1, b_1]$.

Daca φ este strict crescatoare spunem ca drumrile au aceasi orientare iar in caz contrar spunem ca drumurile au orientari diferite (opuse).

Doua drumuri echivalente au acelasi suport.

Exemplu 1. *Drumurile*

$$\overline{r}_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t \in [0,1]$$
$$\overline{r}_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

sunt echivalente si ambele au drept suport portiunea din cercul trigonometric din primul cadran. Intr-adevar, fie $\tau : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, *cu* $\tau(t) = \cos t$ *pentru orice* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. *Atunci* $\overline{r}_1(\tau(t)) = \overline{r}_2(t)$ *pentru orice* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *si* τ *este o functie strict descrescatoare, continua, bijectiva si deci cele doua drumuri sunt echivalente si au orientari opuse.*

Definitie 1. *Se numeste curba parametrizata orice clasa de drumuri parametrizate echivalente.*

O curba parametrizata este simpla (inchisa, neteda) daca drumul care o determina (si deci orice drum echivalent) este simplu (inchis, neted). Cand alegem un drum care determina o curba, alegem implicit si o orientare a curbei. Un drum cu orientare opusa determina o orientare opusa a curbei.

Fie $\overline{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ si $\overline{r}_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^3$ doua drumuri parametrizate cu proprietatea ca $\overline{r}_1(b) = \overline{r}_2(b)$. Se numeste juxtapunerea drumurilor $\overline{r}_1$ si $\overline{r}_2$ si se noteaza cu $\overline{r}_1 \cup \overline{r}_2$ drumul

$$\overline{r}_1 \cup \overline{r}_2(t) = \begin{cases} \overline{r}_1(t) \text{ daca } t \in [a,b] \\ \overline{r}_2(t) \text{ daca } t \in [b,c] \end{cases}$$

Daca C_i este curba definita de drumul $\overline{r}_i$, $i = 1, 2$ atunci $C_1 \cup C_2$ este curba definita de drumul $\overline{r}_1 \cup \overline{r}_2$. Un drum (curba) este neted pe portiuni daca este obtinut prin juxtapunerea unui numar finit de drumuri (curbe) netede.

Lungimea curbelor

Fie C o curba neteda plana avand parametrizarea

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

Fie $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots t_n = b\}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Numarul

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$$

se numeste norma diviziunii Δ. Lungimea curbei C poate fi aproximata cu lungimea liniei poligonale determinate de punctele $(x(t_i), y(t_i))$, une $i = 0, 1, \dots n$ care este egala cu

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i+1})^2 + (y(t_i) - y(t_{i+1}))^2} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\eta_i)^2 + y'(\xi_i)^2} \cdot \Delta t_i$$

unde $\eta_i, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ si $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

Lungimea curbei este

$$l = \lim_{\|\Delta\| \to 0} l_\Delta = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

In mod similar, daca C este o curba neteda in spatiu cu paramaterizarea

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

lungimea ei este

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Observam ca doua drumuri echivalente au aceasi lungmie si prin urmare lungimea curebei nu depinde de parametrizare.

Integrala curbilinie de tipul I

Fie C curba neteda cu ecuatiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

si fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie continua unde V este un domeniu din $\mathbb{R}^3$ care include suportul curbei C.

Alegeme un sistem de puncte $A_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ care determina o diviziune P a curbei C in arce $(A_{i-1}A_i)$ de lungime Δs_i, unde $x_i = x(t_i)$ si $y_i = y(t_i)$. Consideram puncte arbitrare $(x_i^*, y_i^*) \in (A_{i-1}A_i)$ si definim suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i.$$

Fie

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta s_i.$$

norma diviziunii P. Integrala curbilinie de tipul I este prin definitie

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i.$$

Teorema 2. *Cu notatiile anterioare*

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

In cazul in care C este o curba neteda in spatiu cu ecuatiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \tag{1}$$

Integrala curbulinie de primul tip se definieste similar si avem

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

In cazul in care curba C este juxtapunerea unor curbe netede

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

prin definitie

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \cdots + \int_{C_n} f ds.$$

Observam ca integrala curbilinie nu depinde de parametrizare.

Integrala curbilinie de tipul II

Fie C o curba cu parametrizarea

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \tag{2}$$

Fie $A(x(a), y(a), z(a))$ si $B(x(b), y(b), z(b))$ extremitatile curbei C. Cand t parcurge intervalul $[a, b]$ de la a la b, sensul de parcurgere al curbei C este de la A la B. Cand t parcurge intervalul $[a, b]$ de la b la a, curba C este parursa de la B la A. O curba impreuna cu unul din sensurile de parcurgere a ei se numeste curba orientata. Vom nota cu (A, B) curba C cu sensul de parcurgere de la A la B si cu (B, A) curba C parcursa de la B la A.

In cele ce urmeaza sensul de parcurgere al curbei C avand ecuatiile parametrice (2) este de la A la B.

Fie $\overline{F} = (P, Q, R) : V \to \mathbb{R}^3$ un camp vectorial continuu definit pe o multime V care contine suportul curbei C. In punctul $(x(t), y(t), z(t))$ versorul tangentei la curba C este

$$\overline{\tau}(t) = \frac{\overline{r}'(t)}{\|\overline{r}'(t)\|}.$$

Integrala

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds$$

se numeste integrala curbilinie de speta a doua. Se folosesc si notatiile

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds = \int_C P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

sau

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

Atunci

$$\int_C P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$
$$= \int_a^b P(x(t), y(t)), z(t)x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t).$$

Pentru a pune inevidemta sensul de parcurgere al curbei vom scrie

$$\int_{(A,B)} P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Daca se considera cealalalta orientare atunci vom folosi notatia.

$$\int_{(B,A)} P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Fie $\varphi : [a, b] \to [a, b]$,

$$\varphi(t) = a + b - t$$

Consideram paramaterizarea

$$\xi(t) = x(a + b - t), \eta(t) = y(a + b - t), \zeta(t) = z(a + b - t)$$

Atunci versorul tangentei la curba C in punctul $(x(t), y(t), z(t))$ devine $-\overline{\tau}(t)$ si atunci

$$\int_{(B,A)} P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C \overline{F} \cdot (-\overline{\tau})ds =$$
$$- \int_{(A,B)} P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Asadar in cazul integralelor curbilinii de speta a doua, schimbarea sensului de parcurgere a curbeiatrage dupa sine schimbarea semnului integralei.

Integrala $\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds$ se mai noteaza si cu $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$

In cazul in care curba C este juxtapunerea unor curbe netede

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

prin definitie

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{C_1} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \cdots + \int_{C_n} \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

Remark 3. *Daca $\overline{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este un camp de forte si C este curba parametrizata cu suportul inclus in D atunci $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ reprezinta lucrul mecanic efectuat de forta $\overline{F}$ de-a lungul curbei C.*

Exemplu 2. *Calculati lucrul mecanic al fortei $\overline{F}(x, y, x) = x\overline{i} - z\overline{j} + y\overline{k}$ al carei punct de aplicatie descrie curba*

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = \cos t \ , \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]. \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$L = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (t + \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (t + \sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi}{3}$$

Integrale duble

Pe parcursul intregului curs D va fi o multime din plan marginita de o curba inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{D_i, i = 1, \ldots, n\}$ o acoperire a multimii D (adica $D \subset \cup_i D_i$) cu multimi de forma dreptunghiulara (sau mai general avand forma de paralelograme) astfel incat

$$\begin{cases} D \cap D_i \neq \varnothing \text{ pentru } i = 1, \ldots, n \\ \text{interior}(D_i) \cap \text{interior}(D_k) = \varnothing \text{ pentru } i \neq k \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(D_i) = \sup\left\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} : (x,y), (x',y') \in D_i\right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(D_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

norma acoperirii. Daca $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ si definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\text{aria}D_{ij}$$

Integrala functiei f este prin definitie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe D.

Clase de functii integrabile

1) Daca D este o multime compacta si f este continua pe D atunci este integrabila pe D.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de curbe netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei duble

1) Daca $f \geq 0$, atunci $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezinta volumul cuprins intre graficul functiei si planul XOY;

2) $\iint_D dxdy$ preprezinta aria multimii D.

Poprietati ale integralei duble

1) Daca f este integrabil pe D si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe D si avem

$$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \iint_D \alpha f(x,y)dxdy$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe D si atunci $f+g$ este integrabila pe D si avem

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y,x)dxdy$$

3) Daca f este integrabile pe D si D' iar D si D' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $D \cup D'$ si avem

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iiint_{D'} \alpha f(x,y)dxdy.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe D atunci

$$\iiint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

Reducerea integralei duble la o integrala iterata

1) Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

2) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

3) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le x \le d, \alpha(y) \le y \le \beta(y)\}$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemplu 1. *Sa se calculze integrala*

$$\iint_D (2x+y)dxdy, \text{ unde } D = [0,1] \times [0,2]$$

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + xy \right) |_0^2 \; dx = \int_0^1 (4+2x)dx = 5$$

Exemplu 2. *Sa se calculze*

$$\iint_D (3x+y)dx$$

unde D este multimea marginita de curbele $y = x^2 + 1 \quad y = -x^2 \quad x = 0 \quad x = 3.$

$$\iint_D (3x+2y)dx = \int_0^3 (3xy + y^2)|_{-x^2}^{x^2+1} dx = \int_0^3 (6x^3 + 3x + 2x^2 + 1)dx$$

Schimbarea de Variabila in integrala dubla

Fie $T : \Omega \to D$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0 \text{ pe } \Omega.$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Fie f este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Fie $T_1(u,v)$, $T_2(u+\Delta u, v)$, $T_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $T_4(u, v+\Delta v)$ un dreptunghi infinitezimal din Ω. Fie $P_1P_2P_3P_4$ imaginea dreptunghiului $T_1T_2T_3T_4$ prin transformarea T. Aria patrulateriu curbiliniu $P_1P_2P_3P_4$ poate fi aporximata cu aria paralelogramului $A_1A_2A_3A_4$, unde

$A_1(x(u,v), y(u,v))$,
$A_2(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u)$,
$A_4(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$,
$A_3(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$

Aria triunghiului $A_1A_2A_4$ este egala cu

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(u,v) & y(u,v) & 1 \\ x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u & 1 \\ x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v & 1 \end{vmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v \end{vmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2}\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Cum aceasi arie o are si triunghiul $A_2A_3A_4$, rezulta ca

$$\text{aria}(A_1A_2A_3A_4) = \left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Daca (t,s) este un punct din dreptunghiul $T_1T_2T_3T_4$, atunci

$$\text{aria}(P_1P_2P_3P_4) \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s,t)\right| \text{aria}(T_1T_2T_3T_4).$$

Fie $R = \{R_1, R_2, \ldots R_n\}$ o acoperire a multimii Ω cu multtimi de forma dreptunghiulara. Notam cu P_i imaginea multimii $R_i \cup \Omega$ prin transformarea T. Fie $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Observam ca $\|T\| \to 0$ daca si numai $\|P\| \to 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_i f(\xi_i, \eta_i)\text{aria}(P_i) \\ &= \lim_{\|T\|\to 0}\sum_i f(\xi(s_i,t_i), \eta(s_i,t_i)\text{aria}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s_i,t_i)\right|\text{aria}(T_i)dudv \\ &= \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.\end{aligned}$$

Trecerea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0, \infty) \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho$$

Trecerea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta & \rho \in [0, \infty) \\ y = b\rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho$$

Exemplu 3. *1) Calculati*

$$\iint_D y dx dy, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$$

Trecem la coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$$

si atunci domeniul D devine

$$\rho \in [0, 2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Cum $dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho d\rho d\theta$, *avem*

$$\iint_D y dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta d\theta \right) d\rho = \int_0^2 (-\rho^2 \cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}$$

2) Calculati

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{4}}} dx dy, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{4} \leq 1\}$$

Trecem la coordonate polare generalizate

$$x = 2\rho\cos\theta, y = 3\rho\sin\theta$$

In coordonate polare generalizate domesniul D devine

$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Avem

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = 6\rho d\rho d\theta,$$

si atunci

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{4}}} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{6\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) d\rho = -12\pi\sqrt{1-\rho^2}|_0^1 = 12\pi.$$

Suprafete netede

O suprafata este o submultime de puncte S din $\mathbb{R}^3$ pentru care exista o multime conexa si compacta $D \subset \mathbb{R}^2$ si o functie $\overline{r} : D \to S$ bijectiva de clasa C^1

$$\overline{r}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k}$$

astfel incat

$$\overline{r}_u(u,v) \times \overline{r}_v(u,v) \neq 0.$$

unde

$$\overline{r}_u(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\overline{i} + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\overline{j} + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\overline{k}$$
$$\overline{r}_v(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\overline{i} + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\overline{j} + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\overline{k}.$$

Functia $\overline{r}$ se nuemste parametrizare a suprafetei S. Ecuatiile

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \qquad (u,v) \in D$$

se numesc ecuatiile parametrice ale suprafetei S. Vectori

$$\overline{r}_u(u,v), \qquad \overline{r}_v(u,v)$$

sunt tangenti la suprafata S in punctul cu vectorul de pozitie $\overline{r}(u,v)$.

$$\overline{N}(u,v) = \overline{r}_u(u,v) \times \overline{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$
$$= A(u,v)\overline{i} + B(u,v)\overline{j} + C(u,v)\overline{k}$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

este un vector normal la suprafata S in $\overline{r}(u,v)$. Introducem notaiile

$$E = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$G = \overline{r}_v \cdot \overline{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$
$$F = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Pentru simplitate, atunci cand nu exista posibiliate de confuzie, folsim notatiile

$$\overline{r}_u = \overline{r}_u(u,v), \quad \overline{r}_v = \overline{r}_v(u,v)$$

Fie $A_1A_2A_3A_4$ dreptunghiul cu varfurile

$$A_1(u,v), A_2(u+\Delta u, v), A_3(u+\Delta u, v+\Delta v), A_4(u+\Delta u, v+\Delta v).$$

Aria imaginii acestuia prin $\overline{r}$ este aproximativ egala cu aria paralelogramului $P_1P_2P_3P_4$, unde

$$P_1(\overline{r}(u,v)),\ P_2(r(u,v)+\overline{r}_u\Delta u),\ P_4(r(u,v)+\overline{r}_u\Delta u+\overline{r}_v\Delta v),$$
$$P_3(r(u,v)+\overline{r}_v\Delta v).$$

Evident,

$$\text{aria}(P_1P_2P_3P_4) = \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| \, \Delta u \Delta v.$$

Atunci

$$\text{Aria}(S) = \iint_D \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| \, dudv = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv = \iint_D \sqrt{EG-F^2} dudv$$

Example 1. Calculati aria sferei $S = \{(x,y,x \in \mathbb{R}^3) : x^2+y^2+z^2 = r^2, \}$.

$$\overline{r}(u,v) = (r\cos u \sin v, r \sin u \sin v, r\cos v), u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi]$$

Avem

$$\overline{r}_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$$
$$\overline{r}_v = (r\cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r\sin v)$$

Atunci,

$$E = r^2 \sin^2 v,\ G = r^2,\ F = 0$$

si atunci

$$EG - F^2 = a^2 \sin v$$

Asadar,

$$\text{aria}(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} a^2 \sin v dv \right) du = 4\pi a^2.$$

Daca S este definita prin

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

avem parametrizarea

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}, \qquad (u, v) \in D$$

Atunci,

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial v}\overline{j} + \overline{k}.$$

Asadar,

$$\overline{N} = \overline{r}_u \times \overline{r}_v = -\frac{\partial f}{\partial u}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial v}\overline{j} + \overline{k}.$$

si deci

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}.$$

Atunci,

$$\text{Aria}(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} dudv = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Notand

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

avem

$$\text{Aria}(S) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy$$

Example 2. Calculati aria suprafetei $S = \{(x, y, x \in \mathbb{R}^3) : x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$

Avem $z = 1 - x - y$, $(x, y) \in D$, unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, \ x, y \geq 0\}.$$

Evident $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$ si atunci

$$\text{aria}(S) = \iint_D \sqrt{1 + 1 + 1} dxdy = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Integrale de suprafata

Fie S o suprafata cu ecuatiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \ , \qquad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

si fie $F : S \to \mathbb{R}$ o functie continua. Fie $\Delta = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ o diviziune a suprafetei S realizata prin reteaua curbelor de coordomate. Fie $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$ si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\mathrm{diam}(s_i), i = 1, 2, \dots, n\}$$

unde

$$\mathrm{diam}(S_i) = \sup\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, (x,x'), (y,y') \in s_i\}.$$

Putem defini suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\mathrm{aria}(S_i).$$

Prin definitie definim integrala de suprafata a functiei f pe suprafata S prin

$$\iint_S F(x,y,z)d\sigma = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\mathrm{aria}(S_i),$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita.

$$\iint_S F(x,y,z)d\sigma = \iint_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\right\| dudv$$

Daca S este definita prin

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

atunci

$$\iint_S F(x,y,z)d\sigma = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

Poprietati ale integralei de suprafata

1) Daca $F : S \to \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci

$$\iint_S \alpha F(x,y,z)d\sigma = \iint_S \alpha F(x,y,z)d\sigma$$

2) Daca $F, G : S \to \mathbb{R}$ atunci

$$\iint_S (F(x,y,z) + G(x,y,z))d\sigma = \iint_S F(x,y,z)dxdydz + \iint_S G(x,y,z)d\sigma$$

3) Daca S si S' sunt juxtapozabile si $F : S \cup S' \to \mathbb{R}$ atunci

$$\iint_{S \cup S'} F(x,y,z)d\sigma = \iint_S F(x,y,z)dxdydz + \iint_{S'} F(x,y,z)d\sigma.$$

Example 3. Calculati

$$\iint_S (x+y+z)\ d\sigma,$$

unde $S = \{(x, y, x \in \mathbb{R}^3) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$

$$\overline{r}(u,v) = (a\cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v), u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]$$

Avem

$$\overline{r}_u = (-a\sin u \sin v, a\cos u \sin v, -a \sin v)$$
$$\overline{r}_v = (a\cos u \cos v, a \sin u \cos v, 0)$$

Atunci,

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = (-a^2 \cos u \sin^2 v, -a^2 \sin u \sin^2 v, -a^2 \sin v \cos v)$$

si atunci

$$\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| = a^2 \sin v$$

si deci

$$\iint_S (x+y+z)d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos u \sin v + a \sin u \sin v + a\cos v)a^2 \sin v dv \right) du = \pi a^3$$

Fluxul unui camp vectorial

Se numeste orientare a supraftei S orice functie continua $\overline{n} : S \to \mathbb{R}^3$ care asociaza oricarui punnct din S un versor normal la suprafata in punctul respetiv. O suprafata pe care s-a definit o orientare se nuemste suprafata orientata. Deoarece in orice punct exista exact doi versori normali si anume

$$\frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}, \quad -\frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}$$

Acestor doi versori le corespund doua orientari pe S. Orice alta orientare coincide cu una din cele doua datorita faptului ca S este conexa. In continuare fie S o suprafata neteda. Sa fixam o orientare pe S, sa ziceam orienatarea corespunzatoare versorului normal

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}.$$

Fie $\overline{F} = (P, Q, R) : S \to \mathbb{R}^3$ un camp vectorial continuu.

Definitie. Cu notatiile de mai sus

$$\Phi_S(\overline{F}) = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{n} \;\; d\sigma$$

se numeste fluxul campului $\overline{F}$ prin suprafata orientata S.

Terminologie. Deseori in loc ssa spunmem fluxul prin suprafata S orientata dupa normala exterioara (respectiv interioara) vom spune fluxul prin fata exterioara(interioara) a suprafetei S.

I. Fie S o supsrafata avand parametrizarea

$$\overline{r}(u, v) = x(u, v)\overline{i} + y(u, v)\overline{j} + z(u, v)\overline{k}$$

si fie $\overline{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un camp vectorial

$$\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$$

Avem

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$$

Daca suprafata are orientarea

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}$$

atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = \iint_S \overline{F} \cdot \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|} d\sigma = \iint_D (P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))A + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))B +$$
$$+ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))C) dudv.$$

Daca se consoidera orientarea

$$\overline{n} = -\frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}$$

atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = -\iint_S \overline{F} \cdot \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|} d\sigma = -\iint_D (P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))A + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))B +$$
$$+ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))C) dudv.$$

Example 1. Calculati fluxul camoului vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = xz\overline{i} + yz\overline{j} - \overline{k}$$

prin suprafata $S = \{(x, y, x \in \mathbb{R}^3) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ orientata dupa normala exterioara

Avem parametrizarea

$$\overline{r}(u,v) = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v), u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

de unde se obtine vectorul normal

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = (-a^2 \cos u \sin^2 v, -a^2 \sin u \sin^2 v, -a^2 \sin v \cos v)$$

Versorul normalei exterioare este

$$\overline{n} = \frac{1}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|} \left(a^2 \cos u \sin^2 v, a^2 \sin u \sin^2 v, a^2 \sin v \cos v\right)$$

Atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} (a^2 \cos^2 u \sin^3 v \cos v + a^2 \sin 2u \sin^3 v \cos v - a^2 \sin v \cos v) dv \right) du$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} (a^2 \sin^3 v \cos v - a^2 \sin v \cos v) dv \right) du = 0$$

II. Daca S este o supsrafata definita prin

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D$$

atunci punand

$$\overline{r}(x,y) = x\overline{i} + y\overline{j} + z(x,y)\overline{k}$$

avem

$$\overline{r}_x = \overline{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\overline{k} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\overline{r}_y = \overline{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\overline{k} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Notand $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\overline{r}_x \times \overline{r}_y = -p\overline{i} - q\overline{j} + \overline{k}.$$

Daca se considera orientarea

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p\overline{i} - q\overline{j} + \overline{k}),$$

Atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = \iint_D (-P(x,y,z(x,y))p - Q(x,y,z(x,y))q + R(x,y,z(x,y)))dxdy$$

Daca se considera orientarea

$$\overline{n} = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p\overline{i} - q\overline{j} + \overline{k}),$$

Atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = -\iint_D (-P(x,y,z(x,y))p - Q(x,y,z(x,y))q + R(x,y,z(x,y)))dxdy$$

Example 2. Sa se calculeze fluxul campului vectorial $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{i} - z\overline{i}$ prin suprafata $S : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$, orienatata dupa normala interioara (adica normala care face cu cu Oz un unghi ascuatit)

Deci

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in D$$

unde $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Evident

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Orientarea care corespunde normalei care face unghi ascuatit cu Oz este

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p\overline{i} - q\overline{j} + \overline{k})$$

si atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = -\iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy = -\iint_D 2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

In coordonate polate $x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$, domeniul D devine $[0,1] \times [0, 2\pi]$. Atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = -\iint_D 2\sqrt{x^2+y^2} = -\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta \right) d\rho = 2\pi/3.$$

III. Sa presupunem acum ca suprafata S este definita implicit prin $f(x,y,z) = 0$. Daca

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k}$$

atunci grad $f(x,y,z)$ este un vector normal la suprafata S in (x,y,z) si atunci

$$\overline{n} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$$

este o orientare a supraf S. Cu aceasta orientare

$$\Phi_S(\overline{F}) = \iint_S \overline{F} \cdot \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} d\sigma$$

Example 3. Calculati fluxul camoului vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = \frac{1}{x}\overline{i} + \frac{1}{y}\overline{j} + \frac{1}{z}\overline{k}$$

prin suprafata $S = \{(x,y,x \in \mathbb{R}^3) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ orientata dupa normala exterioara

Fie $f = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Versorul normalei exterioare este

$$\overline{n} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} = \frac{1}{\|\text{grad } f\|}(2x, 2y, 2z) = \frac{1}{a}(x,y,z).$$

Atunci

$$\Phi_S(\overline{F}) = \iint_S 3/a d\sigma = 12\pi a$$

Fluxul poate fi calculat si folosind parametrizarea sferei ca la Exemplul 5, dupa cum urmeaza.

$$\overline{r}(u,v) = (a\cos u \sin v, a \sin u \sin v, a\cos v), u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

de unde se obtine vectorul normal

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = -a^2 \cos u \sin^2 v\overline{i} - a^2 \sin u \sin^2 v\overline{j} - a^2 \sin v \cos v\overline{k}$$

Versorul normalei exterioare este

$$\overline{n} = \frac{1}{a^2 \sin v} \left(a^2 \cos u \sin^2 v, a^2 \sin u \sin^2 v, a^2 \sin v \cos v \right).$$

Atunci,

$$\begin{aligned}\Phi_S(\overline{F}) = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} 3a \sin v \right) du \\ &= 2\pi \cdot 6a = 12\pi a\end{aligned}$$

Integrale tripla

In cele ce urmeaza multimea V va fi o multime din plan marginita de o suprafata inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{V_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ o acoperire a multimii V (adica $V \subset \cup_i V_i$) cu multimi de forma paralelipipedica astfel incat

$$\begin{cases} V \cap V_i \neq \varnothing \\ \text{interior}(V_i) \cap \text{interior}(V_j) = \varnothing \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(V_i) = \max \left\{ \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (y - y')^2} : (x, y, z), (x', y', z') \in V_{ijk} \right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam} V_i\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i, z_i) \in V_i \cap V$ definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \text{vol}(V_i)$$

Integrala functiei f pe domeniul V este prin definitie

$$\iint_V f(x, y) dx dy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe D.

Clase de functii integrabile

1) Daca V este o multime compacta iar f este continua pe V atunci este integrabila pe D.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de suprafete netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei triple

$\iint_V dxdy$ preprezinta volumul multimii $V \subset \mathbb{R}^3$

Poprietati ale integralei triple

1) Daca f este integrabila pe V si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V \alpha f(x, y, z) dxdydz = \iiint_V \alpha f(x, y, z) dxdydz$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe V si atunci $f + g$ este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dxdydz = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz + \iiint_V g(x, y, z) dxdydz$$

3) Daca f este integrabile pe V si V' iar V si V' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $V \cup V'$ si avem

$$\iiint_{V \cup V'} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz + \iiint_{V'} \alpha f(x, y, z) dxdydz.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe V atunci

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz \geq 0.$$

Metode de calcul

1) Daca $V = [a, b] \times [c, d] \times [k, p]$

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

1) Domeniul V este cuprins ntre planele $z = a$ si $z = b$. Notam cu V_z proiectia pe planul XOY a intersectiei lui V cu planul $z = z_0$ unde $a \leq z_0 \leq b$, Daca

$$V_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z_0) \in V\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{V_z} f(x, y, z) dxdy \right) dz.$$

2) Domeniul V este un intergrafic proiectabil pe planul xOy, adica este limitat de o

suprafata laterala cilindrica cu generatoarele paralele cu axa Oz si marginita de suprafetele $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$ si $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in D$. Asadar

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_D \left(\iint_{S_i(x,y)}^{S_s(x,y)} f(x, y, z)dxdy \right) dz.$$

Example 4. Calculati

$$\iiint_V xdxdydz, \; V : x + y + z \leq 1, \; x, y, z \geq 0$$

Observam ca

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x - y, \quad (x, y) \in D\}$$

unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2), x + y \leq 1, \; x, y \geq 0\}$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\iiint_V zdxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xdz \right) dxdy = \iint_D x(1 - x - y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy - x^2y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1 - x) - x^2(1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2} \right] dx = \cdots
\end{aligned}$$

Example 5. Calculati

$$\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz, \; V : x^2 + y^2 \leq z^2, \; 0 \leq z \leq 3$$

Observam ca

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3, \quad (x, y) \in D\}$$

unde unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Deci,

$$\iiint_V zdxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 (x^2 + y^2)dz \right) dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)(3 - (x^2 + y^2))dxdy$$

Trecand la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

domeniul D devine

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Cum

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\ dxdy = \rho\ d\rho d\theta$$

avem

$$\iint_D (x^2+y^2)(3-(x^2+y^2))dxdy = iint_{D'}\rho^3(3-\rho)d\rho d\theta = \int_0^3\left(\int_0^{2\pi}(3\rho^3-\rho^4)d\theta\right)d\rho$$

$$= 2\pi\int_0^3(3\rho^3-\rho^4)d\rho = \frac{243}{10}\pi.$$

Schimbarea de variabila in integrala tripla

Fie $T : \Omega \to V$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \Omega$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Daca f este o functie integrabila pe V, atunci

$$\iiint_D f(x, yz)dxdydz = \iiint_V f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

Trecerea de la coordonate sferice la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0, \infty),\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta$$

Trecerea de la coordonate sferice generalizate la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = c\rho \cos\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0, \infty),\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & b\rho\cos\theta\cos\varphi & -c\rho\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & c\rho\sin\theta\cos\varphi \\ a\rho\cos\theta & -b\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = abc\rho^2 \sin\theta$$

Calculati integrala

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right) dxdydz, \quad V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\le 1, z\ge 0\}$$

$$\begin{cases} x=2\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=3\rho\sin\theta\sin\varphi \qquad\qquad\qquad \rho\in[0,1]\ \theta\in[0,\pi/2],\ \varphi\in[0,\pi] \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=6\rho^2\sin\theta.$$

Prin aceasta transformare domeniul V define $V'=[0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi]$ Avem

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right) dxdydz = \iiint_{V'} \rho^2\cdot 6\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{V'} 6\rho^4\sin\theta\cdot d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} 6\rho^4\sin\theta d\varphi\right) d\theta\right) d\rho = \int_0^1 2\pi\cdot 6\rho^4 d\rho = \int_0^1 12\pi\rho^3 d\rho = 12\pi/5$$

In cele ce urmeaza vom presupune ca V admite, pentru fiecare dintre planele de coordonate, o descompunere intr-un numar finit de intergrafice proiectabile (vezi Cursul 4, pag 6-7) pe planul respectiv care au in comun cel mult puncte ale frontierei.

Theorem 1. Fie $V\subset\mathbb{R}^3$ un compact cu frontiera o suprafata inchisa S si $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ un camp vectorial de clasa C^1 pe o multime deschisa care contine V. Atunci fluxul lui $\overline{F}$ prin S orienatata dupa normala exterioara $\overline{n}$ este egal cu integrala divergentei lui $\overline{F}$ pe V, adica

$$\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}d\sigma = \iiint \operatorname{div}\overline{F}\ dxdydz$$

Demonstratie. Vom demontra mai intai ca

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_S R\cdot n_z d\sigma \tag{1}$$

Este suficient sa demonstram aceasta realtie (1) pentru un intergrafic proiectabil pe planul xOy. Asadar, exista un compact $D\subset\mathbb{R}^2$ si functii $z_i(x,y)$, $z_s(x,y)$ cu $(x,y)\in D$.

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z_i(x,y)\le z\le z_s(x,y),\ (x,y)\in D\}.$$

Fie $S_i:\ z=(x,y),\ (x,y\in D)$ si $S_s:\ z_s=(x,y),\ (x,y\in D)$ Avem,

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_D \left(\int_{z_i(x,y)}^{z_s(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) dxdy = \iint_D (R(x,y,z_s(x,y)) - R(x,y,z_s(x,y)))dxdy$$

Pentru S_s normala exterioara exterioara este

$$\overline{n} = (n_x, n_y, n_z) = \frac{1}{\sqrt{p_s^2 + q_s^2 + 1}}(-p_s\overline{i} - q_s\overline{j} + \overline{k}),$$

unde

$$p_s = \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad q_s = \frac{\partial z_s}{\partial y}.$$

Cum in acest caz

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^+ q^2}$$

avem

$$\iint_{S_s} R \cdot n_z d\sigma = \iint_D R(x, y, z_s(x, y))dxdy$$

In mod similar aratam ca

$$\iint_{S_i} R \cdot n_z d\sigma = -\iint_D R(x, y, z_i(x, y))dxdy$$

Suprafata S, care ste frontiera lui V este compusa din S_i, S_s si suprafata cilindrica

$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}|^3 : (x, y) \in \mathrm{Fr}(D), z_i(x, y) \leq z \leq z_s(x, y)\}$$

Penru oroce punct de pe S_c, componenta n_z a normalei este zero si deci

$$\iint_{S_c} R \cdot n_z d\sigma = 0$$

Asadar,

$$\iint_S R \cdot n_z d\sigma = \iint_{S_i} R \cdot n_z d\sigma + \iint_{S_s} R \cdot n_z d\sigma + \iint_{S_c} R \cdot n_z d\sigma$$

$$-\iint_D R(x, y, z_i(x, y))dxdy + \iint_D R(x, y, z_s(x, y))dxdy + 0$$

$$\iint_D (R(x, y, z_s(x, y)) - R(x, y, z_s(x, y)))dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

In mod similar

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S P \cdot n_x d\sigma$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S R \cdot n_y d\sigma$$

Asadar

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

Example 2. Sa se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss fluxul campului $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ prin fata exterioara a suprafetei S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Evident ca div $\overline{F} = 2x + 2y + 2z$ si atunci

$$\begin{aligned}\Phi_S(\overline{S}) &= \iiint (2x + 2y + 2z) dx dy dz \\ &= 2\int_0^{2a} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\theta(\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = 0\end{aligned}$$

Theorem 3. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un compact a carui frontiera C este o reuniune finita de curbe inchise si netede pe portiuni si fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ functii de clasa C^1 pe un deschis care contine D. Atunci

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

unde sensul de parcurgere este in asa fel ca un observator care se deplaseaza de-a lungul curbei C lasa la stanga domeniul D.

Teorema este demonstrata daca aratam ca

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy \tag{2}$$

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy \tag{3}$$

Presupunem ca D poate fi descompus intr-o reuniune finita de domenii proiectabile pe Ox care au in comun cel mult puncte ale frontierelor si de asemenea ca D poate fi descompus intr-o reuniune finita de domenii proiectabile pe Oy. Avand in vedere acest lucru e suficient sa demonstram

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$$

atunci cand D este un inetrgrafic proiectiabi pe axa Ox, adica exista $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel incat

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \le y \le \beta(x), x \in [a, b]\}.$$

Observam ca

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left[P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x)) \right] dx$$

Frontiera lui D este reuniunea a patru curbe cu urmatoarele parametrizari

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \alpha(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \beta(t) \end{cases}, \quad t \in [b, a]$$

$$C_3 : \begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [\alpha(b), \beta(a)]$$

$$C_4 : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [\alpha(a), \beta(b)]$$

Atunci,

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx dy = \int_a^b P(x, \alpha(x)) - \int_a^b P(x, \beta(x)) dx$$

Asadar,

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$$

In mod similar, descopunand eventual D intr-o reuniune finita de intergrafice proiectabile pe Oy se arata ca

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy$$

Example 4. Sa se calculze cu formula lui Green integrala

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy, \text{unde } C \text{ este frontiera domeniului } D = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

parcursa in sens trigonometric.

Functiile $P(x, y) = y^2$ si $Q(x, y) = x^2$ sunt de clasa C^1 si $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$. Avem,

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_D 2(x - y)\ dx dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^2 (\cos\theta - \sin\theta) d\theta \right) d\rho$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi (\cos\theta - \sin\theta) d\theta = -4/3$$

Formula lui Stokes

Theorem 1. Fie S o suprafata a carei fromntiera C este o curba inchisa si neteda pe portiuni. Daca $\overline{F} = (P, Q, R)$ este un camp vectorial de clasa C^1 pe S atunci

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_S \text{rot } \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma$$

unde sensul de parcurgere al curbei C este astfel incat un observator are se deplaseaza pe C si are capul orientat in directia lui $\overline{n}$ lasa S in stanga.

Sa presupunem ca S are parametrizarea

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D$$

Frontiera lui D este curba inchisa Γ cu parametrizarea

$$u = u(t), v = v(t), t \in [a, b]$$

iar curba C care ste frontiera lui S are parametrizarea

$$x = x(u(t), v(t)), \quad x = x(u(t), v(t)), \; x = x(u(t), v(t)) \; t \in [a, b].$$

Consideram integrala

$$I = \int_C P(x, y, z) dx$$

Atunci

$$I = \int_a^b \Big[P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)u'(t)) + \\ + P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t))u'(t) \Big] dt$$

Observam ca de de fapt integrala I este o integrala curbilinie pe frontira Γ a lui D

$$I = \int_\Gamma \widetilde{P}(u, v) du + \widetilde{Q}(u, v) dv$$

unde

$$\widetilde{P}(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$$

$$\widetilde{Q}(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$$

Aplicand formula lui Green, avem

$$I = \int_D \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial v}(u, v) \right) dudv$$

Avem,

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial u} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$
$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

Reamintim ca vrsorul normalei la suprafata este

$$\overline{n} = \frac{A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \quad A = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

Atunci

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial v}(u,v) = B\frac{\partial P}{\partial z} - C\frac{\partial P}{\partial y}$$

Reamintim ca pentru un camp vectorial $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$

$$\text{rot } \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \overline{k}$$

Deci

$$\int_C P(x,y,z)dx = \iint_D \left(B\frac{\partial P}{\partial z} - C\frac{\partial P}{\partial y} \right) dudv$$

Similar obtinem

$$\int_C Q(x,y,z)dy = \iint_D \left(C\frac{\partial Q}{\partial x} - A\frac{\partial Q}{\partial z} \right) dudv$$
$$\int_C R(x,y,z)dz = \iint_D \left(A\frac{\partial R}{\partial y} - B\frac{\partial R}{\partial x} \right) dudv$$

In concluzie,

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_D A\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + B\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + C\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dudv$$

si deci

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_S \text{rot } \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma$$

Example 2. Calculati cu formula lui Stokes

$$\int_C ydx + zdy - xydz$$

unde C este frontiera triunghiului ABC ale carui varfuri sunt la intersectia planului

$$2x + y + z = 4$$

cu axele de coordonate.

Evident

$$S: \ z = 4 - 2x - y, \quad (x, y) \in D$$

unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 2x + y \leq 4, \ x, y \geq 0\}.$$

Observam ca punand

$$F = y\overline{i} + z\overline{j} - xy\overline{k}$$

avem

$$\text{rot } \overline{F} = -(x+1)\overline{i} + y\overline{j} - \overline{k}.$$

Atunci,

$$\int_C ydx + zdy - xydz = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iint_D (-(x+1)\overline{i} + y\overline{j} - \overline{k}) \cdot (2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) dxdy$$

$$= \iint_D (-x + 2y - 3) dxdy = \iint_0^2 dx \int_0^{4-2x} (-2x + y - 3) dy = -12$$

Independenta de drum a integralei curbilinii

Pe parcusrul acesei sectiuni vom presupune ca D este un domeniu stelat, adica exista $M \in D$ astfel incat pentru orice $N \in D$, segmentul $[MN] \subset D$.

Propozitie. Presupunem ca $\overline{F} : D \to \mathbb{R}^3$, $\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ este un camp vectorial de clasa C^1 irotational, adica rot $\overline{F} = 0$ sau echivalent

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Daca C si C' sunt doua curbe avand acelsi punct initial $A(x_A, y_A, z_A)$ si acelasi punct final $B(x_B, y_B, z_B)$, atunci

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{C'} Pdx + Qdy + Rdz$$

Demonstratie Fie $S \subset V$ o suprafata neteda marginita de curbele C si C'. Notam cu $\widetilde{C}$ curba C parcursa in sens invers. Atunci, cu formula lui Stokes, obtinem

$$\int_{\widetilde{C} \cup C'} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) n_z \right] d\sigma = 0$$

In consecinta

$$\int_{C'} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{\widetilde{C}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

Cum integrala curbilinie este independenta de drum si depinde numai de extremitati vom folosi notatia

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(x_A,y_A,z_A)}^{(x_B,y_B,z_B)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Definitie. Un camp vectorial $\overline{F} : D \to \mathbb{R}^3$, $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ se numeste conservativ daca exista o functie $U : D \to \mathbb{R}^3$ de clasa C^1 astfel incat

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Functia U se nuemste potential al campului $\overline{F}$.

Din criteriul lui Schwarz rezulta

Propozitie. Oricew camp vectorial conservativ de clasa C^1 este irotational

Propozitie. Daca $U : D \to \mathbb{R}^3$ este potential al campului $\overline{F} = (P,Q,R)$, si C este o curba din D avand inceputul in $A(x_A, y_A, z_A)$ si sfarsitul in $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A)$$

Demonstratie Daca C are parametrizarea

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a,b]$$

avem

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)dt = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).$$

Functia potential

Lemma 1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua si fie

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a, b]$$

Atunci F este derivabila pe $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Lemma 2. Daca $f(x, y)$ si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sunt fucntii continue pe $[a, b] \times [c, d]$ atunci functia

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dy, \quad y \in [c, d]$$

este derivabila si

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Propozitie. Fie $\overline{F} = (P, Q, R) : D \to \mathbb{R}^3$ un camp vectorial irotational adica

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Atunci $\overline{F}$ este conservativ.

Demonstratie. Vom demonstra teorema in cazul in care domesniul D este un paralalipiped dreptunghic. Fixam $(x_0, y_0, z_0) \in D$ si definim, pentru $(x, y, z) \in D$ definim

$$U(x, y, z) = \int_{\Gamma(x,y,z)} P dx + Q dy + R dz$$

unde $\Gamma(x, y, z)$ este curba formata din segmentele segmentele $[(x_0, y_0, z_0), (x, y_0, z_0)]$, $[(x, y_0, z_0), (x, y, z_0)]$ si $[(x, y, z), (x, y_0, z_0)]$. Se observa ca

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t)dt.$$

Folsind lemele de mai sus avem

$$\frac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} &= Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, t)dt = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial t}(x, y, t)dt \\ &= Q(x, y, z_0) + Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0) = Q(x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t)dt \\ &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial t}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial t}(x, y, t)dt \\ &= (x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - P(x, y_0, z_0) = P(x, y, z)\end{aligned}$$

Asadar, U este potential al campului vectorial $\overline{F}$.

Cu notatiiile de mai sus avem

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Corpul numerelor complexe

Pe multimea $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ consideram dopua operatii, adunarea $(+)$ si inmultirea $(\cdot)$ definite astfel

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') &= (xx' - yy', xy' + x'y)\end{aligned}$$

Impreuna cu aceste doua operatii $\mathbb{R}^2$ este un corp comutativ, notat cu $\mathbb{C}$ si numit corpul numerelor complexe. Multimea $\mathbb{R} \times 0$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$ izomorf cu $\mathbb{R}$. Astfel putem identifica x cu $(x, 0)$ si in loc de $(x, 0)$ vom scie x. Notam

$$i = (0, 1)$$

Atunci cu identificarea de mai sus

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \equiv x + i \cdot y,$$

adica forma algebrica a numarului complex (x, y). Daca $z = x+iy$ este un numar complex atunci x se nuemste partea reala a lui z si se noteaza cu $\mathrm{Re}z$ iar y se nuemste partea reala

a lui z si se noteaza cu Im z. Daca $z = x + iy$ este un numar complex, definim modulul lui z prin.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

si conjugatul lui z prin

$$\overline{z} = x - iy$$

.

Propozitie. Fie $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Atunci

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(4) $|\overline{z}| = |z|$

(5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(6) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

(7) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(8) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$

Fiind dat un numar complex nenul $z = x + iy$ exista un numic numar real $\varphi \in (-\pi, \pi]$ astfel incat

$$\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Acest numar se numeste argumentul principal al lui z si il notam cu Arg φ. Aplicatia arg : $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (multimea partilor lui $\mathbb{R}$) definita prin

$$\arg z = \{\text{Arg } z + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

se numeste functia argument. Scrierea

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

poarta numele de forma trigonometrica a numarului complex z.

Propozitie. Daca $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_1 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ atunci

(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin\varphi_1 + \varphi_2))$

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin\varphi_1 - \varphi_2))$

(3) $z_1^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$

Elemente de topologie

Fie $a \in \mathbb{C}$ si $r > 0$. Multimea $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < r\}$ se nuemnste discul deschis de centru a si raza r. Spunem ca V este o vecinatate a lui a daca exista $r > 0$ astfel ca $D(a,r) \subset V$. Vom nota cu $\mathcal{V}(a)$ multimea vecinatatilor lui a. Multime $D \subset \mathbb{C}$ este deschisa daca este vecinatate pentru orice element al sau. Familia multimilor deschise, notata cu τ, se numeste topologia pe $\mathbb{C}$, iar perechea $(\mathbb{C}, \tau)$ spatiul topologic al multimii numerelor complexe. O multime $F \subset \mathbb{C}$ se numeste inchisa daca complemetara ei $\mathbf{C}G = \mathbb{C} \setminus F$ esye deschisa. Fie $G \subset \mathbb{C}$. Un ounct $z \in G$ se nuemste punct interior al multimii G daca $G \in \mathcal{V}(z)$. Punctul $\in \mathbb{C}$ este punct de aderenta pentru G daca G intersecteaza orice vecinatate a lui z: Multimea punctelor de aderenta ale multimii G se numeste nchiderea lui G si se noteaza cu $\overline{G}$. Multimea $\partial G = \overline{G} \cap \overline{\mathbf{C}G}$ se numeste frontiera lui G. O multime $G \subset \mathbb{C}$ este marginitta daca exista un numar real $M > 0$ astfel ca $|z| < M$ pentru orice $z \in G$.

Punctul $z \in \mathbb{C}$ este punct de acumulare pentru G daca pentru orice $v \in \mathcal{V}(x)$ avem $(V \setminus z) \cap G \neq \varnothing$ O familie $\mathcal{F}$ de multimi din $\mathbb{C}$ se va numi acoperirea multimii G daca reuniunea multimilor familiei include pe G. Daca multimile familiei sunt deschise atunci acoperirea se va numi deschisa. O multime se numeste compacta daca din orice acoperire deschisa infinita a lui G se poate extrage o subacoperire finita.

O multime $G \subset \mathbb{C}$ este neconexa daca exista doua multimi deschise G_1 si G_2 cu $G_1 \cap G \neq \varnothing$, $G_1 \cap G \neq \varnothing$, $G_2 \cap G_2 \cap G \neq \varnothing$ si $G \subset G_1 \cup G_2$. Daca nu este neconexa, atunci multimea este conexa. O multime deschisa si conexa se numeste domeniu.

Se adauga multimii numerelor complexe un punct ∞ numit punctul de la infinit. Se obtine astfel planul complex completat notat cu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Se numeste vecinatate a punctului ∞ orice multime care include o multime de forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ (exteriorul unui disc centrat in origine). Observam ca orice multime nemarginita are pe ∞ ca punct de acumulare si reciproc, orice multime care are pe ∞ ca punct de acumulare este nemarginita.

Siruri si Serii de numere complexe

Definitie. Sirul $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ converge catre $z \in \mathbb{C}$ si scriem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ daca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat $|z_n - z| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. (cu alte cuvinte in orice vecinatate a lui z se gasesca toti termenii cu exceptia unui numar finit)

Propozitie. Fie $z_n = x_n + iy_n$, $n \geq 1$ un sir de numere complexe. Sirul $(z_n)_{n\geq 1}$ converge la $z = x + iy$ daca si numai daca sirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ si $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente

si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Propozitie. Daca sirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent atunci este marginit.

Definitie. Daca $(a_n)_n \geq 0$, consideram $(s_n)_{n\geq 0}$ sirul sumelor partiale $s_n = a_0+a_1+\cdots a_n$. Daca acesta este convergent si are limitav s scriem

$$s = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

In acest caz spunem ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta si are suma s. Daca sirul $(s_n)_{n\geq 0}$ este divergent spunem ca seria este divergenta. Spunem ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este absolut convergenta daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este convergenta.

Propozitie. Orice serie absolut convergenta este convergenta.

Teorema. Daca seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sunt doua serii de numere comlexe absolut convergente cu sumele a, respectiv b, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ cu termenul general

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_n b_0$$

este absolut convergenta si are suma ab

Functii complexe

Definitie. Fie z_0 un punct de acumulare al lui G si $f : G \to \mathbb{C}$ Spunem ca $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $|f(z_0) - l| < \varepsilon$ pentru orice $z \in G$ cu $|z - z_0| < \delta_\varepsilon$. Spunem ca $f : G \to \mathbb{C}$ este continuan in $z_0 \in G$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ pentru orice $z \in G$ cu $|z - z_0| < \delta_\varepsilon$.

Observatie. Daca $z_0 \in G$ este un punct de acumulare al lui G atunci f este continua in z_0 daca $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definitie. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa. O functie $f : G \to \mathbb{C}$ se numeste $\mathbb{C}$-derivabila in $z_0 \in G$ daca exista

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Atunci $f'(z_0)$ se numeste derivata lui f in z_0. Daca f este $\mathbb{C}$-derivabila in orice punct al lui G atunci f se numeste olomorfa. O functie olomorfa $f : G \to \mathbb{C}$ defineste o alta functie

$$z \ni G \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$$

numita derivata lui f. Au loc formulele obisnuite

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}, g'(z) \neq 0$$

$$(f \circ g) = (f' \circ g)g'$$

Propozitie. Daca f este o functie $\mathbb{C}$-derivabila in $z_0 = x_0 + iy_0$ si

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

atunci functiile u si v sunt derivabile partial in raport cu x si y in punctul (x_0, y_0) si derivatele partiale verificate ecuatiile Cauchy Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

si

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Demonstratie. Notam $\Delta z = z - z_0$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$

$$f(z) - f(z_0) = u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))$$

Evident

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)}{\Delta z} + i\frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)}{\Delta z}$$

In particular,

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x+iy_0)-f(z_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i\lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\
f'(z_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0+iy)-f(z_0)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + i\lim_{x\to x_0} \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y} \\
&= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

si atunci

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

Propozitie. Fie $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ este o functie definita pe o multime deschisa care contine punctul $z_0 = x_0 + iy_0$. Daca functiile u si v sunt $\mathbb{R}$-diferentiabile in (x_0,y_0), si

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

atunci f este $\mathbb{C}$-derivabila in z_0.

Demonstratie. Deoarece u, v sunt $\mathbb{R}$-diferentiabile in (x_0,y_0) atunci au derivate partiale in (x_0,y_0) si exista functii ω_1 si ω_2 astfel incat

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_1(x,y) = 0, \quad \omega_1(x_0,y_0) = 0$$

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \omega_1(x_0,y_0)\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_2(x,y) = 0, \quad \omega_2(x_0,y_0) = 0$$

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \omega_2(x_0,y_0)\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$$

avem

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z_0) &= u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \omega_1(x,y)|\Delta z| \\
&\quad + i(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \omega_2(x,y)|\Delta z|) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\
&\quad + i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta y + (\omega_1(x,y) + i\omega_2(x,y))|\Delta z| \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta z + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta z + (\omega_1(x,y) + i\ \omega_2(x,y))|\Delta z|
\end{aligned}$$

Atunci, exista

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{z\to z_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + (\omega_1(x,y) + i\ \omega_2(x,y))\frac{|\Delta z|}{\Delta z} \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{z\to z_0}(\omega_1(x,y) + i\ \omega_2(x,y)) = 0$$

si

$$\left|\frac{|\Delta z|}{\Delta z}\right| = \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} = 1$$

rezulta ca

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Corollary 1. Fie $f = u + iv$ olomorfa pe D cu u si v de clasa C^2 pe D. Atunci u si v sunt functii armonice pe D adica $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si $\Delta v = 0$

Example 2. Aratati ca $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ este armonica pe $\mathbb{R}^2$ si determinati v astfel incat functia $f = u + iv$ sa fie olomorfa pe $\mathbb{C}$.

Se verifica usor ca $\Delta u = 0$. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 2x$$

Trebuie sa avem

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x$$

Integrand prima relatie in raport cu y si derivand in raport cu x obtinem

$$v = 2xy + y^2 + h(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + h'(x)$$

rezulta ca $h'(x) = 2x$ si deci $h(x) = -x^2 + c$ unde c este o consranta reala arbitrara. Asadar,

$$v = 2xy + y^2 - x^2 + c$$

si deci

$$f = x^2 - y^2 + 2xy + i(2xy + y^2 - x^2 + c) = z^2 - iz^2 + ic.$$

Exemple de functii complexe de o variabila complexa

Functia exponentiala

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

este absolut convergenta. Functia exponentiala $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este definita prin

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Functia exponentiala are urmatoarele proprietatile

(1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2) $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $e^{x+iy} = e^x(\cos x + i \sin y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

(5) functia exponentiala este olomorfa si $(e^z)' = e^z$

(6) $e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Functia logaritmica

Sa observam intai ca restrictia functiei exponentiale

$$\exp : \{z \in \mathbb{C} : Im\ z \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

este bijectiva. Injectivitatea este evidenta. Pentru surjectivitate, fie $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Atunci

$$\zeta = |\zeta| \exp(i(\ \mathrm{Arg}(z)+2k\pi) = \exp(\ln(|z|)) \exp(i(\ \mathrm{Arg}(z)+2k\pi) = \exp(\ln|z|+i(\ \mathrm{Arg}(z)+2k\pi))$$

Inverrsa acestei functii este

$$\ln_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} : \Im z \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\ln_k(z) = \ln|z| + i(\ \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi)$$

se umeste determinarea de ordinul k a functiei logaritm. Determinarea corespunzatoare lui $k = 0$ se noteaza cu Ln si se numeste determinarea principala a logaritmului. Aplicatia

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad ln(z) = \{Ln(z) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$$

se umeste multifunctia logaritm. Deoarece

$$e^{Ln(z_1z_2)} = z_1z_2 = e^{Ln(z_1)}e^{Ln(z_2)} = e^{Ln(z_1)+Ln(z_1)}$$

deducem ca

$$\ln(z_1z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_1)$$

In particular,

$$Ln(z_1z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_1) + 2k\pi i$$

unde $k = 1$ daca $\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \leq -\pi$, $k = 0$ daca $\pi < \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \leq \pi$ si $k = -1$ daca $\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) > \pi$.

Sa notam $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} \subset \mathbb{C}$.

Propozitie. Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ functia ln_k este o functie olomorfa pe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ si

$$(ln_k z)' = \frac{1}{z} \text{ pentru } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$$

In particular

$$(Lnz)' = \frac{1}{z} \text{ pentru } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$$

Functii trigonometrice si hiperbolice

Aceste functii se extind de la $\mathbb{R}$ si sunt definite pe intregul $\mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{7}$$

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{8}$$

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{9}$$

$$\cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{10}$$

Sunt functii olomorfe si avem

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \tag{11}$$

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z \tag{12}$$

$$\cosh z = cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz) \tag{13}$$

Se pot verifica urmatoarele proprietati

$$\exp(iz) = \cos z + \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{14}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 = \cosh^2 z - \sinh^2 z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{15}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{16}$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \mp \cos z_1 \sin z_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{17}$$

Functia putere

Pentru $a \in \mathbb{C}$ si $k \in \mathbb{Z}$ definim functia

$$p_{a,k} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ p_{a,k}(z) = \exp(a \ln_k(z)).$$

Aplicatia

$$p_a : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ p_a(z) = \{p_{a,k}(z), k \in \mathbb{Z}\}$$

se numeste multifunctia putere de exponent a iar $p_{a,k}$ se numete determinarea (ramura) de ordinul k a functiei putere. Determinarea (ramura) corespunzatoare lui $k = 0$ se numeste determinarea (ramura) principala a functiei putere si vom nota

$$z^a = \exp(aLn(z)).$$

Functiile $p_{a,k}$ sunt olomorfe pe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ si

$$p'_{a,k}(z) = a p_{a-1,k}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$$

Integrale pentru functii de o variabila complexa

Se numeste drum in $\mathbb{C}$ orice functie continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Multimea $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ se numeste suportul lui γ iar $\gamma(a)$ si $\gamma(b)$ sunt respectiv punctul initial si punctul final al drumului. Drumul este inchis daca $\gamma(a) = \gamma(b)$; drumul este simplu inchis daca γ este injectiv pe $[a, b)$. Spunem ca un drum inchis este orientat pozitiv daca un observator situat in punctul $\gamma(t)$ lasa interiorul lui γ in stanga atunci cnd t parcurge intervalul $[a, b]$. Daca $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ este un drum, atunci drumul $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C}$ definit prin $\gamma(t) = a + b - t$, $t \in [a, b]$ se numeste opusul lui γ. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ si $\tau : [b, c] \to \mathbb{C}$ doua drumuri parametrizate cu proprietatea ca $\gamma(b) = \tau(b)$. Se numeste juxtapunerea drumurilor γ si τ si se noteaza cu $\gamma \cup \tau$ drumul

$$\gamma \cup \tau = \begin{cases} \gamma(t) \text{ daca } t \in [a, b] \\ \tau(t) \text{ daca } t \in [b, c] \end{cases}$$

Doua drumuri $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ si $\tau : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ sunt echivalente (cu pastrarea orientarii) daca exista $h : [a,b] \to [a_1, b_1]$ un homeomorfism creascator, diferentiabil pe $[a,b]$ (exceptand eventual o submultime finita) astfel incat $\gamma = \tau \circ h$. Numim curba orientata o clasa de drumuri echivalente.

Daca $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ iar $x(t)$ si $y(t)$ sunt functii derivabile cu derivatele continue pe (a,b) (adica functii de clasa C^1) spunem ca γ este un drum neted. Daca intr-un numar finit de puncte din (a,b), $x(t)$ sau $y(t)$ nu sunt derivabile, γ se numeste drum neted pe portiuni.

Definitie. Un domeniu D (adica o multime deschisa si conexa) din plan se numeste simplu conex daca orice drum simplu inchis cu imaginea inclusa in interiorul lui D este frontiera unei submultimi incluse in intregime in D.

Definitie. Fie $G \subset \mathbb{C}$ si $f : G \to \mathbb{C}$ continua, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ drum neted. Definim integrala

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.$$

Daca $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [u((x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t))]dt +$$

$$i\int_a^b [(v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t))]dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

Asadar

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Propozitie. Fie $\gamma : [a;b] \to G$ si $\tau : [a_1, b_1] \to G$ doua drumuri echivalente si $f : G \to \mathbb{C}$ o functie continua. Atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\tau f(z)dz$$

Demonstratie. Deoaece γ si τ sunt echivalente, exista $h : [a_1, b_1] \to [a,b]$ un homeomorfism creascator, diferentiabil cu exceptia unui numar finit de puncte astfel incat $\tau = \gamma \circ h$. Atunci folosind formula de schimbare de variabila din cazul integralei Riemann reale obtinem

$$\int_\tau f(z)dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\tau(s))\tau'(s)ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(h(s)))\gamma'(h(s))h'(s)ds$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)ds = \int_\gamma f(z)dz.$$

Doua drumuri echivalente au acelasi suport si aceeasi orientare (adica aceeasi origine si acelasi punct final). Din Propozitia de mai sus deducem ca pentru calculul integralei curbilinii este sucient sa indicam suportul si orientarea urmand ca apoi, la calculul efectiv al integralei sa deteminam unul din drumurile echivalente care au suportul si orientarea indicate (adica sa precizam parametrizarea).
Urmatoarea propozitie rezulta imediat din definitia integralei.

Propozitie. (1) Fie $\gamma : [a,b] \to G \subset \mathbb{C}$, $f, g : G \to \mathbb{C}$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\int_\gamma [\alpha f(z) + \beta g(z)]dz = \alpha \int_\gamma f(z) + \beta \int_\gamma g(z)dz.$$

(2) Fie $\gamma : [a,b] \to G$ si $\tau : [b,c] \to G$ doua drumuri parametrizate cu proprietatea ca $\gamma(b) = \tau(b)$ si $\gamma \cup \tau$ juxtapunerea celor doua drumuri. Daca $f : G \to \mathbb{C}$ este o functie continua atunci

$$\int_{\gamma\cup\tau} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\tau f(z)dz.$$

(3) Fie $\gamma : [a,b] \to G$ un drum neted pe portiuni si γ^- opusul lui γ. Daca $f : G \to \mathbb{C}$ este o functie continua, atunci

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Exemplu 1. Fie C cercul cu centrul in z_0 si raza r, parcurs in sens trigomometric. Atunci

$$\int_C (z - z_0)^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{daca} \quad n = -1 \\ 0 & \text{daca} \quad n \neq -1 \end{cases}$$

O parametrizare a cercului C este

$$\gamma(t) = re^{it} + z_0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Atunci,

$$\int_C \frac{1}{z - z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}(re^it)'dt = \int_0^{2\pi} re^{it}ire^itdt = 2\pi i.$$

Daca $n \neq -1$,

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} ir^{n+1}e^{i(n+1)t}dt = 0$$

Teorema (Teorema lui Cauchy)**.** Fie G un domeniu simplu conex din $\mathbb{C}$ si $f : G \to \mathbb{C}$ o functie olomorfa. Pentru orice domeniu marginit $D \subset \mathbb{C}$ cu $\gamma = \partial D$ drum simplu inchis neted pe portiuni avem

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{1}$$

Demonstratie. Conform definitiei avem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma vdx + udy =$$

(aplicand formul lui Green)

$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

ultima egalitate rezultand din relatiile Cauchy-Riemann.

Observatie. Concluzia teoremei de mai sus ramane adevarata (cu aceasi demonstratie) daca G este o multime deschisa arbitrara, D este un domeniu marginit simplu conex cu $\overline{D} \subset G$, a carui frontiera γ este un drum simplu inchis si neted pe portiuni.

Corolar. Fie G un domeniu simplu conex si fie drumurile netede pe portiuni $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to G$ avend acelaeasi extremitati. Atunci

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Demonstratie. Sa consideram cazul in care cele doua drumuri nu au si alte puncte comune in afara de extremitati. Din teorema lui Cauchy avem

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f(z)dz = 0$$

de unde rezulta egalitatea dorita. In cazul in care drumurile au un numar finit de puncte in comun aplicam argumentul anterior pentru fiecare bucla (portiuni ale celor doua drumuri cuprinse intre doua puncte comune consecutive.

Integrarea functiilor olomorfe. Formula lui Cauchy

Definitie. Fie f o functie complexa continua pe o multime deschisa G din $\mathbb{C}$. O functie $F : G \to \mathbb{C}$ se numeste primitiva a lui f daca F este olomorfa pe G si $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in G$.

Teorema. Fie G un domeniu din $\mathbb{C}$. Daca F este o primitiva a lui f pe G si $\gamma : [a, b] \to G$ este un drum neted pe portiuni din G atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demonstratie. Se observa ca este suficient sa demonstram terorema pentru cazul in care γ este un drum neted. In acest caz

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_\gamma \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

.

Propozitie. Doua primitive ale unei functii f definita pe un domeniu G difera printr-o constanta.

Demonstratie. Exercitiu !

Teorema. (de existenta a primitivei) Fie $D \subset \mathbb{C}$ domeniu simplu conex si $f : G \to \mathbb{C}$ functie olomorfa. Atunci exista $F : D \to \mathbb{C}$ functie olomorfa astfel incat $F'(z) = f(z)$ pentru oricare $z \in D$.

Demonstratie. Fixam z_0 un punct oarecare din D si fie $z \in D$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continua in z exista $\delta > 0$ astfel incat pentru orice $\zeta \in G$ cu $|\zeta - z| < \delta$ avem $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Deoarece D este dechisa putem alege δ astfel incat $D(z, \delta) \subset D$. Fie h cu $|h| < \delta$. Atunci segmentul $[z, z + h] \subset D$. Fie

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$$

unde γ_z este un drum oarecare din D cu inceputul in z_0 si sfarsitul in z. In virtutea Corolarului Teoremei lui Cauchy (vezi cursul 9), $F(z)$ este corect definita, nedepinzand de drumul ales. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un drum astfel incat $\gamma(a) = z_0$ si $\gamma(b) = z$. Atunci

$$\int_\gamma d\zeta = \int_a^b x'(t)dt + i\int_a^b y'(t)dt = z - z_0$$

Atunci

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta - \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)d\zeta\right| \leq \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} |f(z)-f(\zeta)d\zeta$$

si deci

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{1}{h}\sup_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)| \leq \varepsilon.$$

Asadar,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = f(z)$$

si deci $F'(z) = f(z)$.

Teorema (Formula lui Cauchy)**.** Fie $G \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu comex si fie C o curba din G inchisa, simpla, neteda pe portiuni si orientata pozitiv, care este frontiera unui domeniu D. Atunci pentru orice $z_0 \in D$ are loc relatia

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Demonstratie. Fie $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \subset D$ cercul de raza r centrat in z_0 orientat pozitiv si fie ω un segment (numit taietura), paralel cu axa Ox care are un capat pe $C(z_0, r)$ si celalalt pe C. Domeniul marginit care are frontiera $C \cup \omega^- C(z_0, r)^- \cup \omega$ este un domeniu simplu conex ce nu-l contine pe z_0. Conform teoremei lui Cauchy avem

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C\cup\omega^-\cup C(z_0,r)^-\cup\omega} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

de unde rezulta ca

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Deoarece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}dz = 1$$

obtinem

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})-f(z_0)}{re^{it}} ire^{it}dt\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(z_0+re^{it})-f(z_0)| \to 0 \text{ pentru } r \to 0.$$

Convergenta uniforma

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu si $(f_n)_{n\geq 0}$ un sir de functii $f_n : D \to \mathbb{C}$.

Definitie. Spunem ca sirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform la functia $f : D \to \mathbb{C}$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, pentru orice $N \geq n_\varepsilon$ si orice $z \in D$.

Definitie. Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniform la f daca sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor partiale $s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ converge uniform la f.

Teorema. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un sir de functii care converge uniform la f pe D si fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un drum neted pe portiuni. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f dz$$

Corolar 1. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ uniform convergenta la f in domeniul D. Fie fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un drum neted pe portiuni. Atunci exista $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$ si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

Serii de puteri

Definitie. Se numeste serie de puteri o serie de functii de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

unde $z \in \mathbb{C}$, centrul seriei $z_0 \in \mathbb{C}$ iar coeficientii $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Teorema. Fiind data o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, exista un unic $R \in [0, \infty]$ astfel incat

(1) seria converge absolut pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| < R$

(2) seria este divergenta pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| > R$

Numarul R se numeste raza de convergenta a seriei de puteri si se calculeaza cu formula Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R. Aceasta serie defineste o functie pe discul deschis $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R).$$

Seria de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

obtinuta prin derivarea termen cu termen a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, are aceasi raza de convergenta R (verificati !) si defineste o functie g pe discul deschis $D(z_0, R)$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Cu aceste notatii avem

Teorema. Seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniform la $f(z)$ pe orice disc $D(z_0, r)$ cu $0 < r < R$.

Theorem 2. Functia $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ este olomorfa pe $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ si

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Mai mult pentru orice $k \in \mathbb{N}$ exista derivata de ordinul k a lui f si

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n(z-z_0)^{n-k}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Observatie. Cu notatiile de mai sus avem

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \tag{1}$$

Functii complexe analitice

Teorema (Cauchy-Taylor)**.** Fie $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa pe un domeniu oarecare $G \subset \mathbb{C}$. Atunci

1) f este infinit $\mathbb{C}$-derivabila pe G.

2) Fie $z_0 \in G$ si $R = \inf\{|\zeta - z_0|,\ \xi \in \mathbb{C} \setminus G\}$. Exista o unica serie de puteri centrata in z_0 cu raza de convergenta $\geq R$ astfel incat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,\ |z - z_0| < R.$$

Pentru orice $0 < r < R$ si orice $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Demonstratie Fie $r < R$. Fie $z \in D(z_0, r)$. Din formula lui Cauchy avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall |z - z_0| < r.$$

Daca $\zeta \in C(z_0, r)$ avem $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ si deci

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

inmultind fiecare termen cu $f(\zeta)$ si utilizand Corolarul 1, obtinem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ cu } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \tag{2}$$

Prin urmare $f(z)$ este suma unei serii de puteri centrate in z_0 pentru $z \in D(z_0, r)$ pentru orice $0 < r < R$. Concluzia 1) rezulta din Teorema 2. Din observatia (1) rezulta ca in dezvoltarea in serie de puteri (2) avem

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deci coeficientii a_n nu depind de $0 < r < R$ si, ca urmare, dezvoltarea (2) e valabila pentru orice z cu $|z - z_0| < R$, cea ce demonstreaza 2).

Definitie. Seria din relatia de mai se numeste seria Taylor asociata functiei f in punctul z_0.

Definitie. Fie $f : G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ deschisa si $z_0 \in G$. Spunem ca f se dezvolta in serie de puteri in z_0 daca exista o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ cu raza de convergenta $R > 0$ astfel incat $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pentru orice $z \in D(z_0, R)$. Functia f se numeste analitica pe G daca f se dezvolta in serie de puteri in orice punct $z \in G$.

Teorema. Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisa si $f : G \to \mathbb{C}$. In aceste conditii f este olomorfa pe G daca si numai daca f este analitica pe G.

Demonstratie. Faptul ca o functie olomorfa este analitica rezulta din teorema Cauchy - Taylor iar faptul ca o functie analitica este olomorfa rezulta din faptul ca orice serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$ defineste o functie olomorfa pe $D(z_0, R)$.

Teorema (Morera)**.** Fie $f : D \to \mathbb{C}$ continua, unde D este un domeniu simplu conex. Daca $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pentru orice drum neted $\gamma \subset D$, atunci f este olomorfa in D.

Demonstratie. Fie $z_0 \in D$. si fie $F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)dz$, unde γ_z este un drum oarecare din D, neted pe portiuni care uneste z_0 cu z. In teorema de existenta a primitivei s-a demonstrat ca daca f este o functie olomorfa atunci F este de asemenea olomorfa si $F'(z) = f(z)$. Cum conditia ca f sa fie olomorfa a fost folosita numai pentru a demonstra independenta de drum a integralei curbilinii, deducem ca F este olomorfa si in virtutea teoremei Cauchy-Taylor, rezulta ca $f = F'$ este de asemenea olomorfa.

Propozitie (Inegalitatile lui Cauchy)**.** Fie $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ o functie olomorfa marginita, $|f(z)| < M$ pentru orice $z \in D(z_0, R)$. Atunci

$$f^{(n)}(z_0) \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Demonstratie. Fie $0 < r < R$. Cu Formula lui Cauchy avem

$$|f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!M}{r^n}.$$

Concluzia propozitiei rezulta trecand la limita cu $r \to R$

Teorema (Liouiville)**.** Daca $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfa si marginita atunci f este constanta.

Demonstratie. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$. Deoarece f este marginita exista $M > 0$ astfel incat $|f(z)| < M$. Daca $R > 0$, atunci din propozitia anterioara deducem ca $|f'(z_0)| < M/R$. Deoarece f este olomorfa pe $\mathbb{C}$ rezulta ca aceasta inegalitate este adevarata pentru orice $R > 0$. Cu $R \to \infty$ rezulta ca $f'(z_0) = 0$. Asadar $f'(z) = 0$ pentru orice z si folosind relatiile Cauchy-Riemann concluzionam ca f este constanta.

Serii Laurent

Definitie. Se numeste serie Laurent o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ se numeste partea principala iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se numeste partea regulata (tayloriana)

Sa presupunem ca $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, care reprezinta partea regulata este convergenta pentru $|z-z_0| < R$. Daca seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^n$ este conevergenta pentru $|z-z_1| < R_1$, rezulta ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ este convergenta pentru $\frac{1}{|z-z_0|} > r = 1/R_1$. Daca $r < R$ atunci seria Laurent este convergenta in coroana circulara $r < |z-z_0| < R$.

Theorem 1. Fie $G \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : G \to \mathbb{C}$ o functie olomorfa si coroana circulara $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ cu $\overline{D} \subset G$. Pentru orice z din D functia f poate fi dezvoltata in serie Laurent de puteri ale lui $z - z_0$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Demonstratie. Fie cercurile centrate in z_0, $C(z_0, R_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = R_1\}$ si $C(z_0, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = R_2\}$ si $\gamma = [z_0 + R_1, z_0 + R_2]$ un segment de dreapta cu capetele pe cele doua cercuri. Domeniul $D^* = D \setminus \gamma$ este simplu conex cu frontiera $\partial D^* = C(z_0, R_2) \cup \gamma^- \cup C(z_0, R_1)^- \cup \gamma$. Cu formula lui Cauchy, avem pentru $z \in D^*$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Daca $\zeta \in C(z_0, R_2)$ avem $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$ si deci

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}.$$

Daca $\zeta \in C(z_0, R_1)$ avem $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$ si deci

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^n}.$$

In consecinta, daca $\zeta \in C(z_0, R_2)$ avem

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}.$$

si daca $\zeta \in C(z_0, R_1)$ avem

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{f(\zeta)}{(z - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n}.$$

Intrucat convergenta este uniforma, prin integrare termen cu termen obtinem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^n$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C(z_0,R_2)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

Rezulta ca

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

unde

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0 \\ a_n =& \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R_1)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1} d\zeta, \quad n \leq -1. \end{aligned}$$

Din Teorema lui Cauchy rezulta ca pentru orice $R_1 < r < R_2$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0 \\ a_n =& \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1} d\zeta, \quad n \leq -1. \end{aligned}$$

Puncte singulare izolate. Reziduuri

Definition 2. Fie $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$ si $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Punctul z_0 se numeste punct singular izolat pentru functia f daca exista $R > 0$ astfel ncat $D(z_0, R) \subset G$ si f este olomorfa pe $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Din Teorema anterioara, rezulta ca exista $r > 0$ astfel incat pentru orice $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ avem

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Daca partea principala a dezvoltarii este identic nula atunci z_0 se numeste punct singular izolat aparent.

Daca partea principala are un numar finit de coeficienti nenuli, adica este de forma

$$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0},\ a_{-n} \neq 0$$

atunci z_0 se numeste pol de ordinul n

Daca partea principala are o infinitate de termeni nenului atunci z_0 se numeste punct singular izolat esential.

Definition 3. Fie z_0 un punct isolat pentru f is fie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dezvolatrea lui f in serie Laurent pe multimea $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ Se numeste reziduu al lui f in punctul z_0 si se noteaza $Res(f, z_0)$ coeficientul a_{-1} al dezvoltarii lui f in serie Laurent de puteri ale lui $z - z_0$. Asadar,

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} f(z)dz,\ 0 < r < R.$$

Propozitie. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa, $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa si z_0 un punct singular izolat pentru f. Atunci z_0 este un punct singular aparent daca si numai daca f este restrictia unei functii olomorfe g pe $G \cup \{z_0\}$.

Demonstratie. Daca z_0 este un punct singular aparent, exista $R > 0$ astfel incat pentru orice $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Functia $g : G \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definita prin

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ a_0 & z = z_0 \end{cases}$$

este olomorfa pe $G \cup \{z_0\}$ si restrictia ei la G este f. Reciproca, este evidenta.

Corolar. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa, $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa si z_0 un punct singular izolat pentru f. Atunci z_0 este un punct singular aparent daca si numai daca functia f are limita in punctul z_0.

Proposition 4. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa, $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa si z_0 un punct singular izolat pentru f. Atunci z_0 este un pol de ordinul n daca si numai daca exista o functie g olomorfa pe $G \cup \{z_0\}$ cu $g(z_0) \neq 0$ astfel incat

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}. \tag{1}$$

Demonstratie. Sa presupunem ca z_0 este un pol de ordinul n. Atunci exista $R > 0$ astfel incat pentru $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ sa avem

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots, a_{-n} \neq 0.$$

Asadar, daca $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ atunci

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \cdots$$

si deci $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^n = a_{-n}$ Functia $g : G \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^n f(z) & z \neq z_0 \\ a_{-n} & z = z_0 \end{cases}$$

este olomorfa cu $g(z_0) \neq 0$ si daca $z \in G$ atunci

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}.$$

Reciproc sa presupunem ca exista $g : G \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa care satisface (1) si $g(z_0) \neq 0$. Intrucat g este olomorfa exista $R > 0$ astfel incat pentru $z \in D(z_0, R)$ sa avem

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Atunci, daca $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ avem

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^n} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{n-1}} \cdots + \frac{a_{n-1}}{z-z_0} + a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \cdots$$

si cum $a_0 = g(z_0) \neq 0$, rezulta ca z_0 este un pol de ordinul n.

Corolar. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa, $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa si z_0 un punct singular izolat pentru f. Atunci z_0 este pol de ordin n pentru f daca si numai daca

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$$

Corolar. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa, $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa si z_0 un punct singular izolat pentru f. Atunci z_0 este punct singular esential pentru f daca si numai daca nu exista $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)|$

Proposition 5. Daca f are in z_0 un pol de ordinul n atunci

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}$$

Demosntratie. Deoarece z_0 este pol de ordin n exista $g : G \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa cu $g(z_0) \neq 0$ astfel incat

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^n}.$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Atunci, daca $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$,

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots}{(z - z_0)^n}$$

Atunci reziduul lui f in z_0 este coeficientul lui a_{n-1} din dezvoltarea in serie de puteri a lui $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$. Deci,

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(n-1)}(z)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}$$

Corolar. Daca f are in z_0 un pol de ordinul 1 atunci

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Theorem 6. Fie $G \subset \mathbb{C}$ o multime deschisa , $a_1, a_2, \ldots a_n \in G$ si $f : G \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_n\} \to \mathbb{C}$ o functie olomorfa in $G \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ (deci acesta sunt puncte izolate pentru f). Fie D un domeniu marginit simplu conex astfel incat $\overline{D} \subset G$ si $a_1, a_2, \ldots a_n \in D$. Daca frontiera lui D notata cu C este o curba neteda pe portiuni si orientata pozitiv atunci

$$\int_C f(z) dz = \sum_{i=1}^{n} 2\pi i Res(f, a_i)$$

Demonstratie. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ numere pozitive suficient de mici astfel ca discurile $D(a_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sa fie incluse in D si disjuncte doua cate doua. Fie $C(a_i, r_i)$ frontierele lor

orientate pozitiv. Fie $D^* = D \setminus \cup_{i=1}^n D(a_i, r_i)$ cu frontiera (orientata pozitiv) $\partial D^* = \partial D \setminus \cup_{i=1}^n C(a_i, r_i)$. Cu Teorema lui Cauchy, se poate arata

$$0 = \int_{\partial D^*} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz + \sum_{i=1}^n \int_{C(a_i,r_i)^-} f(z)$$

si deci

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n Res(f, a_i).$$

Propozitie. Fie G o multime deschisa din $\mathbb{C}$ si $p, q : G \to \mathbb{C}$ doua functii olomorfe pe G. Daca $p(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ si $g'(z_0) \neq 0$ atunci z_0 este un pol de ordinul unu pentru functia $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ si

$$Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Demonstratie. Intr-o vecinatate a lui z_0

$$q(z) = q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q'(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

Atunci

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0)[q'(z_0) + (z - z_0)q''(z_0)/2 + \cdots]} = \frac{p(z_0)}{q'(zo)}.$$

Integrale de forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

unde $\theta \to R(\sin\theta, \cos\theta)$ este o functie continua pe $[0, 2\pi]$, rationala in argumentele $\sin\theta$ si $\cos\theta$.

Aceasta integrala se reduce la integrala unei functii complexe daca se face schimbarea de variabila $z = ei\theta$. Atunci

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

Deoerece $dz/d\theta = ie^{i\theta}$ avem $d\theta = dz/iz$. Cand θ parcurge intervalul $[0, 2\pi]$ variabila complexa $z = e^{i\theta}$ parcurge in sens pozitiv cercul unitate $|z| = 1$. In acest fel notand cu C cercul unitate parcurs in sens pozitive, integrala devine

$$I = \frac{1}{i} \int_C R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{z},$$

Ultilizand teorema reyiduurilor obtinem ca

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

unde

$$f(z) = R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{1}{z}$$

si z_k sunt punctele singulare ale lui f din discul unitate.

Exemplu. Calculati integrala

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - cos\theta}$$

Procedand ca mai sus integrala devine

$$\int_C \frac{dz/iz}{\sqrt{2} - \frac{1}{2z}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \int_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)} = -\frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}$$

Fie

$$f(z) = \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}$$

Observam ca avem un singul pol $z_1 = \sqrt{2} - 1$ in dicusl unitate

$$Res\,(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{z - \sqrt{2} - 1} = -\frac{1}{2}$$

Asadar,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - cos\theta} = 2\pi.$$

Calculul integralelelor improprii de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Vom presupune ca $f(x) = p(x)/q(x)$ este o fucntie rationala astfel incat numitorul nu se anuleaza pe $\mathbb{R}$ si gradul lui $q(x)$ este cu cel putin 2 mai mare decat gradul numaratorului $p(x)$.

Asadar, exista $R_0 > 0$ si $M > 0$ astfel incat punctele singulare ale lui $f(z)$ (adica zerourile lui $q(z)$) sa se gaseasca in exteriorul discului $D(0, R_0)$ cu centrul in origine si raza R_0 si astfel incat

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}, \quad |z| > R_0.$$

Consideram curba inchisa orientata pozitiv compusa din segmentul de dreapta $[-R, R]$ si semicercul S_R din semiplanul superior. Conform Teoremei reziduurilor,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{S_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k),$$

unde z_k sunt punctele singulare ale lui f din semiplanul superior, $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. Vom arata ca pentru $R \to \infty$ integrala pe semicercul S_R tinde la zero. Atunci

$$\left|\int_{S_R} f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|dz \le \frac{\pi R M}{R^2} = \frac{\pi M}{R}$$

Asadar daca $R \to \infty$ valoarea integralei tinde la zero. In consecinta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Exemplu. Calculati integralele

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$$

Solutiile ecuatiei $z^4 = -1$ sunt

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$$

Dintre acestea

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

se afla in semiplanul superior. Atunci

$$I_1 = 2\pi i \left(Res(f_1, z_0) + Res(f_1, z_)\right)$$

$$I_2 = 2\pi i \left(Res(f_2, z_0) + Res(f_2, z_)\right)$$

Atunci,

$$Res(f_1, z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4}, \qquad Res(f_1, z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}$$
$$Res(f_2, z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}, \qquad Res(f_2, z_0) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4}$$

In consecinta

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Definitie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cu $f(t) = 0$ daca $t < 0$. Definim tramsformata Laplace a functiei f, notata cu F sau $\mathcal{L}[f]$, prin

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

in acele puncte $s \in \mathbb{C}$ pentru care integrala improprie de mai sus este convergenta, adica exista si este finita limita

$$\lim_{a\to} \int_0^a f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Functia F se mai numeste si functie imagine.

In examplele urmatoare toate functiile considerate se presupun inmultite cu functia lui Heaviside

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[t](p) = \int_0^\infty te^{-pt}dt = -t\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{p}dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p^2}\right|_0^\infty = \frac{1}{p^2}, \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$\mathcal{L}[t^n](p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt}dt = -t^n\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{n}{t}^{n-1} e^{-pt}pdt = \frac{n}{p}\mathcal{L}(t^{n-1}) = \frac{n!}{p^{n+1}},\ \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](p) = \int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}dt = \left.\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha - p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha},\ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, \alpha$$

$$\mathcal{L}[\cos t](p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{it}](p) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-it}](p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}, \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2+1},\ \mathrm{Re}\, p > 0$$

Transformarea Laplace

Definitie. Se numesc functie original orice functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cu proprietatile

(1) $f(t) = 0$ daca $t < 0$;

(2) pe orice interval marginit f este continua cu exceptia unui numar finit de puncte de dicontinuitate de prima speta (un punct de discontinuitate este de speta intai daca functia are in acel punct limite laterale finite).

(3) exista $s_0 \in \mathbb{R}$ si $M > 0$ astfel incat

$$f(t) \leq Me^{s_0 t}, \forall t > 0$$

Numarul s_0 se numeste indice de crestere.

Teorema. Fie f o functie original cu indicele de crestere σ_0. Atunci $F = \mathcal{L}[f]$ este definita in semiplanul $\{p \in \mathbb{C} : \text{ Re } p > s_0\}$ este olomorfa in acest semiplan si

$$F'(p) = \int_o^\infty [-tf(t)]e^{-pt}dt \tag{1}$$

Demonstratie. Fie $p = s + it$ cu $s > s_0$.

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{(s_0-s)t}dt \leq M \int_0^\infty e^{(s_0-s)t}dt = \frac{M}{s-s_0}$$

De aici rezulta ca integrala este convergenta in semiplanul $s = \text{Re } p > s_0$.

$$F(z) - F(p) = \int_0^\infty f(t) \left(e^{-zt} - e^{-pt} \right) dt$$

$$e^{-zt} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k e^{-pt}}{k!}(z-p)^k = e^{-pt} - te^{-pt}(z-p) + (z-p)^2 R(z,p,t)$$

Cum

$$|R(z,p,t)| \leq \left| \sum_{k=2}^\infty \frac{(-t)^k e^{-pt}(z-p)^k}{k!} \right| = \left| \sum_{l=0}^\infty \frac{(-t)^{l+2}e^{-pt}(z-p)^{l+2}}{(l+2)!} \right|$$

$$\leq t^2 e^{-st} \sum_{l=0}^\infty \frac{(-t)^l}{l!}|z-p|^l = t^2 e^{-st} e^{-|z-p|t} \leq t^2 e^{-(s-|z-p|)t}$$

$$\left| \int_0^\infty R(z,p,t)f(t)dt \right| \leq M \int_0^\infty t^2 e^{-(s-|z-p|)t} e^{s_0 t}dt = M \int_0^\infty t^2 e^{(|z-p|t-(s-s_0))t}dt$$

ultima expresia fiind finita pentru $z \in D(p,r)$. Atunci

$$\lim_{z\to p} \frac{F(z)-F(p)}{z-p} = -\int_o^\infty tf(t)e^{-pt}dt \tag{2}$$

Deoarece

$$t < \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}, \forall \alpha > 0$$

rezulta ca

$$|tf(t)| < \frac{M}{\alpha} e^{\alpha + s_0}$$

deci $tf(t)$ este functie original si integrala din formula (2) este absolut convergenta pentru $s > s_0 + \alpha > s_0$.

Teorema. Fie f si g functii original si $F = \mathcal{L}[f]$. Avem urmatoarele proprietati:

1) Proprietatea de liniaritate

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g], \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2) Proprietatea asemanarii

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad \alpha > 0$$

3) Proprietatea intarzierii

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)](p) = e^{-p\alpha} F(p), \quad \alpha \geq 0$$

4) Proprietatea de deplasare

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t} f(t)](p) = F(p+\lambda), \quad \text{Re } \lambda + \text{Re } p > 0$$

Demonstratie. 2) Cu schimbarea de variabila $s = \alpha t$ avem

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)](p) = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{ps}{\alpha}\right) f(s) ds = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

3) Cu schimbarea de variabila $s = t - \alpha$ avem tinand cont de faptul ca f este o functie original (deci $f(t-\alpha) = 0$ pentru $t < \alpha$) avem

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)](p) = \int_0^\infty f(t - \alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(s) e^{-p(s+\alpha)} ds = e^{-p\alpha} F(p)$$

Propozitie (Derivarea originalului)**.** Presupunem ca f este o functie de $n-$ori derivabila pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ca $f, f', \ldots \ldots, f^{(n)}$ sunt functii original cu indicii de crestere $s_0, s_1, \ldots, s_n$. Fie $k = \max\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$. Notam $f^{(k)}(0) = \lim_{t \to 0} f^{(k)}(t)$. Atunci

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^n \mathcal{L}(f)[p] - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) p^{n-k-1}, \text{ Re } p > k.$$

Demonstratie. pentru $n = 1$,

$$\mathcal{L}[f'](p) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(t)\ e^{-pt}\big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = p\mathcal{L}[f](p) - f(0).$$

Pentru $n = 2$

$$\mathcal{L}[f''](p) = p\mathcal{L}[f'](p) - f'(0) = p^2[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Propozitie (Integrarea originalului)**.** Fie f functie original cu indicele de crestere s_0. Atunci, pentru orice $p \in \mathbb{C}$, Re $p > s_0$ avem

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p) = \frac{\mathcal{L}[f](p)}{p}.$$

Demonstratie. Fie $g(t) = \int_0^t f(s)ds$. Se verifica ca $g(t)$ este functie original si $g(0) = 0$. Avem

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[g'](p) = p\mathcal{L}[g](p).$$

Propozitie (Derivarea imaginii)**.** Fie f functie original cu indicele de crestere s_0 si $F = \mathcal{L}[f]$. Pentru $n \geq 1$

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p)$$

Demonstratie. Observam ca relatia (2) se poate scrie

$$F'(p) = \mathcal{L}[-tf(t)](p)$$

Propozitia rezulta aplicand succesiv aceasta formaula.
Exemplu

$$\mathcal{L}\left[t\sin t\right](p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Enuntam fara demonstratie urmatorul rezultat

Teorema (Formula Mellin-Fourier)**.** Fie f functie original cu indicele de crestere s_0 si $F = \mathcal{L}[f]$. Atunci in punctele de continuitate ale lui f avem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{a-iR}^{a+iR} F(p)e^{pt}dp,\ a > s_0$$

iar in punctele de discontinuitate

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp,\ a > s_0$$

Teorema (Mellin)**.** Fie f functie original cu indicele de crestere s_0 si $F = \mathcal{L}[f]$. Daca F se poate prelungi la o functie olomorfa pe $\mathbb{C}$ cu exceptia unui numar finit de puncte singulare $p_1, p_2, \ldots, p_n$ si

$$\sup_{|p|=R} |F(p)| \to 0 \text{ cand } R \to \infty \tag{3}$$

atunci

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} Res(F(p)e^{pt}, p_k)$$

Demonstratie. Fie $C(a, R)$ cercul de raza R, centrat n punctul de centru a si semicercul $\gamma_R(a) = C(a, R) \cap \{p \in \mathbb{C} : \ \text{Re } p \leq a\}$. Fie curba nchisa $\Gamma_R = \gamma_R \cup [a - iR, a + iR]$ parcursa in sens pozitiv. Tinand cont de (3), se poate arata ca pentru $t > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R(a)} F(p)e^{pt}dp = 0$$

Cu Formula Mellin-Fourier deducem

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{a-iR}^{a+iR} F(p)e^{pt}dp, \ a > s_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{a-iR}^{a+iR} F(p)e^{pt}dp + \int_{\gamma_R(a)} F(p)e^{pt}dp\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R(a)} F(p)e^{pt}dp = \sum_k Res(F(p)e^{pt}, p_k). \end{aligned}$$

Rezolvarea ecuatiilor diferentiale

Definitie. O ecuatie diferentiala pentru functia $y = y(t)$ definita pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ de n ori derivabila este o relatie de forma

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

O functie $y : I \to \mathbb{R}$ este o solutie a ecuatiei diferentiale daca

$$F(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0, \ \forall t \in I$$

O ecuatie diferentiala de forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_y = f(t)$$

cu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ se numeste ecuatie diferentiala liniara cu coeficieni constanti de ordinul n.

Fie ecuatia diferentiala

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

cu conditiile initiala

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, \ y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

Vom determina $y(t)$ pentru $t \geq 0$ folosind transformata Laplace.

$$a_n \mathcal{L}[y^{(n)}](p) + a_{n-1} \mathcal{L}[y^{(n-1)}](p) + \cdots + a_1 \mathcal{L}[y'](p) + a_0 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f](p)$$

Notand $F = \mathcal{L}[f]$ si $Y = \mathcal{L}[y]$ obtinem

$$a_n \left(p^n Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} y_k p^{n-1-k} \right) + \cdots + a_2 (p^2 X(p) - p y_1 - y_0) + a_1 (p X(p) - y_0) + a_0 X(p) = Y(p)$$

Notam

$$A(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$$

$$B(p) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k p^{n-1-k} + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} y_k p^{n-2-k} + \cdots + a_1 y_0$$

avem

$$A(p) X(p) = B(p) + F(p)$$

si deci

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)}$$

de unde cu formula lui Mellin se obtine $y(t)$.

Exemplu. Sa se rezolva ecuatia

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}, \qquad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-t}]$$

$$p^2 Y(p) - y'(0) - p y(0) + p Y(p) - y(0) - 2Y(p) = \frac{1}{p+1}$$

si deci

$$Y(p)(p^2 + p - 2) = \frac{1}{p+1} + 1$$

$$Y(p)(p-1)(p+2) = \frac{p+2}{p+1}$$

Asadar,

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

si deci,cu formaula lui Mellin

$$y(t) = Res\left(\frac{e^{pt}}{p^2 - 1}, 1\right) + Res\left(\frac{e^{pt}}{p^2 - 1}, -1\right) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} = \sinh(t), \quad t \geq 0.$$